基于Fisher分类器模型的研究

熊舒鹏

（昆明理工大学 机器人工程 昆明市）

1. **Fisher分类器（Fisher Classifier）**

## Fisher分类器定义

**（Gemini 2.5）**

Fisher分类器，也称为线性判别分析（Linear Discriminant Analysis, LDA），是一种经典的线性分类方法。其核心思想是找到一个最优的投影方向，将高维数据投影到一维空间上，使得同类样本在投影后尽可能接近，不同类样本在投影后尽可能远离。

假设我们有两个类别*C*1和*C*2，在原始*d*维特征空间中有各自的样本集合。我们的目标是找到一个投影向量，将任意样本*x*投影到一维空间上的点 *y*=*wTx*。

为了衡量投影后类别的可分性，Fisher提出了一个判别准则：最大化投影后类别均值之差的平方与类别内部方差之和的比值。

记类别*C*1和*C*2在原始空间的均值向量分别为*m*1和*m*2，协方差矩阵分别为 Σ1和Σ2。

其中*N*1和*N*2分别是类别*C*1和*C*2的样本数量。

样本投影到一维空间后，类别C1和C2的均值分别为：

投影后类别均值之差的平方为

投影后类别*C*1的方差为：

同理，投影后类别*C*2的方差为

Fisher判别准则*J*(*w*)定义为：

将上述推导结果代入，得到：

为了进一步简化，我们引入散度矩阵的概念。

**类内散度矩阵 (Within-class scatter matrix) *SW*：**

*SW*度量了类内样本的散布程度，是各个类别协方差矩阵的加权和。在LDA的经典形式中，假设两个类别的协方差矩阵相同，即Σ1=Σ2=Σ。此时，*SW*可以定义为：

更一般地，对于*k*个类别，类内散度矩阵定义为：

此时，投影后的类内方差之和为

**类间散度矩阵 (Between-class scatter matrix) *SB*：**

*SB*度量了类别均值之间的散布程度。对于两类别问题，其定义为：

对于多类别问题，类间散度矩阵定义为：

其中 m 是所有样本的总均值向量。

对于两类别问题，*J*(*w*)可以写成使用散度矩阵的形式：

分子的

所以，Fisher判别准则最终表示为：

我们的目标是找到一个向量 w 来最大化这个比值*J*(*w*)。这是一个广义瑞利商（Generalized Rayleigh Quotient）的形式。最大化*J*(*w*)的问题可以通过求解广义特征值问题来解决。

令*J*(*w*)对*w*求导并令导数等于零：

利用矩阵求导公式

分子必须为零：

注意到

根据

这是一个广义特征值方程,其中是特征值，是对应的特征向量。我们希望最大化,因此我们需要找到对应最大特征值的特征向量。

假设是非奇异的 (通常情况下，如果样本数量大于特征维度且没有完美的线性相关性，是非奇异的),我们可以将方程转化为标准的特征值问题：

对于两类别问题，。代入上式：

注意到是一个标量。因此，的方向与的方向平行。

这意味着对于两类别问题，最优的投影方向正比于类内散度矩阵的逆乘以类别均值之差。我们通常取作为投影向量。

**分类决策**

将新的样本投影到一维空间上得到。为了进行分类，我们需要找到一个阈值。如果,则判为类别;否则判为类别。

阈值的选择有多种方法，一种常见的做法是选择在投影后两个类别的均值之间，例如。

总结来说，Fisher分类器 (LDA)的数学推导过程旨在找到一个最优投影方向,通过最大化类间散度与类内散度的比值来实现最佳分类。对于两类别问题，最优的投影方向正比于类内散度矩阵的逆乘以类别均值之差。

**通俗易懂**

想象你有很多不同种类的水果（比如苹果和香蕉），每个水果都有一些特征，比如颜色深浅、大小、形状等等。这些特征就是我们数据的高维信息。现在你想找一个最简单的方法来区分苹果和香蕉，比如只看一个单一的维度。

你可以试着只看颜色深浅。结果发现，有些浅色的可能是青苹果，有些深色的可能是熟透的香蕉，颜色深浅这个维度区分得不太好，两种水果的颜色范围有很多重叠。

你也可以试着只看大小。可能大多数苹果比香蕉大，但也有小苹果和大香蕉，大小这个维度也有重叠。

Fisher 分类器想做的就是：找到一个“最好的角度”来看这些水果，使得在这个角度下，苹果和香蕉能被最清楚地区分开来。

这个“最好的角度”就是将高维数据投影到一个一维的直线上。

什么是“最清楚地区分”？

在Fisher看来，“最清楚地区分”意味着两件事同时发生：

同类水果要“抱团”： 在投影到直线上之后，所有苹果的点要尽可能地挨在一起，所有香蕉的点也要尽可能地挨在一起。它们的“分散程度”（也就是方差或散度）要小。

不同类水果要“远离”： 在投影到直线上之后，苹果那个“团”和香蕉那个“团”之间的距离要尽可能地远。它们的“中心”（也就是均值）之间的距离要大。

Fisher的聪明之处在于，他设计了一个衡量标准（叫做 Fisher 判别准则），来量化这个“区分度”。这个标准是这样计算的：

区分度 = (苹果团和香蕉团中心距离的平方) / (苹果团的分散程度 + 香蕉团的分散程度)

想一想，要让这个“区分度”最大，你就需要让分子（中心距离）尽可能大，同时让分母（分散程度之和）尽可能小。这不就正是我们想要的吗？两个团离得远，同时每个团内部很紧凑。

怎么找到“最好的角度”？

数学公式的推导过程就是在找这个“最好的角度”（也就是那个投影向量 w），使得按照上面的公式计算出来的“区分度”最大。

结果表明，这个“最好的角度”的方向，可以通过一个相对简单的计算得到：它正比于一个矩阵（叫做类内散度矩阵的逆）乘以两个类别中心点（均值向量）的差。简单来说，就是综合考虑了数据在每个类别内部的散布情况以及两个类别中心之间的差异。

找到最好的角度后怎么分类？

找到了最好的投影直线后，我们把所有样本点都投影到这条直线上。对于一个新的未知水果，我们也把它投影到这条直线上。然后，我们在直线上找一个合适的“分界点”（比如投影后苹果团和香蕉团中心的中点）。

如果新的水果投影后的点落在了分界点的一边，我们就判断它是苹果；如果落在了另一边，就判断它是香蕉。

总结：

Fisher分类器（LDA）就像是帮你找到一个魔法眼镜，通过这个眼镜看数据（投影到一条线上），能让不同类别的数据点看起来“离得最远”，而同一类别的数据点看起来“挤得最近”，从而最容易把它们区分开来。数学公式就是找到这副魔法眼镜参数的方法。